双対標準形線形計画問題とKarmarkarの正準形について(数値解析の基礎理論とその周辺)

AUTHOR(S):

土谷, 隆

CITATION:

土谷, 隆. 双対標準形線形計画問題とKarmarkarの正準形について(数値解析の基礎理論とその周辺). 数理解析研究所講究録 1988, 676: 330-336

ISSUE DATE:

1988-12

URL:

http://hdl.handle.net/2433/100953

数理解析研究所講究録
676巻 1988年 330-336

双対標準形線形計画問題とKarmarkarの正準形について

統計数理研究所　土谷　隆　(Takashi TSUCHIYA)

1. はじめに

Karmarkar [1] が線形計画問題に対して射影変換を用いた多項式オーダーの内点法を提案して以来，線形計画問題の内点法に関して精力的な研究が進められている． 標準形の線形計画問題の双対問題＜D＞（n変数m制約式；$m>n$）：

$$\min\ c^t x, \quad \text{subject to} \quad A^t x \leq b, \quad A\in \mathrm{R}^{n\times m},\ x, c\in R^n,\ b\in R^m \tag{1}$$

については，山下 [2] とFreund [3] によって，射影の概念を用いた多項式性を持つ解法が提案されている．山下法をその本質は損なわないようにして少し修正したものとFreund法とは同一の方向を与える．用いる射影変換も導出の仕方も異なる両者が同じ方向を与える事情は [4] において解析されている．一方，Freundの方法は双対標準形線形計画問題に対するKarmarkar法のアナロジーを与えるものであることがFreund自身によって指摘されている．ここでは，双対標準形線形計画問題＜D＞を，Karmarkar法自身がそのまま適用できるいわゆる“Karmarkarの正準形”に直接変換できることを示し，“双対標準形に適用したKarmarkar法”と山下法との関係について考察する．また，ここで述べる変換を使うと，Karmarkarの原論文[1]での仮定“目的関数の最小値=0”をはずしてKarmarkar法を適用するために Todd-Burrell [5] によって提案された（Karmarkar正準形に対する）目的関数の下界値の更新法を，双対標準形の問題に対しても適用することができる．双対標準形に適用した場合の Todd-Burrellの目的関数の下界値の更新法と，山下法で使われている（目的関数値未知の場合の）目的関数値の下界値の更新法との関係についても述べる．

2. 同次化された問題とKarmarkarポテンシャル関数

ここでは＜D＞に関して次のことを仮定する．

（i）＜D＞の制約領域は内点を持つ．

(ii) Aの rank はnである.

(iii) 解集合は有界である.

(iv) 目的関数の最小値はc_0^*で既知とする.

ここで,

$$A_H = \begin{pmatrix} -A \\ b^t \end{pmatrix}, \quad x_H = \begin{pmatrix} x \\ 1 \end{pmatrix}, \quad c_H(c_0) = \begin{pmatrix} c \\ -c_0 \end{pmatrix} \tag{2}$$

と記すことにすると,<D>は次のようにも書ける:

$$\min\ c_H^t(c_0^*)\,x_H, \qquad \text{subject to} \quad A_H^t x_H \geqq 0, \qquad x_H \in R^{n+1}. \tag{3}$$

問題<D>を同次化した問題<DH>を次のように定義する:

$$\min\ c_H^t(c_0^*)\,z_H, \qquad \text{subject to} \quad A_H^t z_H \geqq 0, \qquad z_H \in R^{n+1}. \tag{4}$$

<DH>の制約に加えてもう一つ等式線形制約条件$p_H^t z_H = q$ ($p_H \in R^{n+1}$, $q\,(\neq 0) \in R$) を適当に付加して得られる形の線形計画問題<Dp>を考える.(特に,$p_H = (0, \dots, 0, 1)^t$, $q = 1$ とすると,<D>そのものが得られる.) <Dp>は,もしそれが有界な解集合を持つならば,<DH>の制約領域で定義されているKarmarkarのポテンシャル関数の乗法版

$$F(z_H, c_0) \equiv \frac{(c_H^t(c_0) z_H)^m}{\prod A_H^t z_H} \qquad (c_0 \leqq c_0^*) \tag{5}$$

(ベクトルvについて記号$\prod v$でvの各要素の積を表す;この式のlogをとったものがKarmarkarのポテンシャル関数である.) の値が十分に0に近いような<DH>の制約領域内の点を求めることにより解くことができる.すなわち,各$z_H^{(i)}$が<DH>の制約領域内にあり, $c_0^{(i)} \leqq c_0^*$, $F(z_H^{(i)}, c_0^{(i)}) \to 0$ であるような数列 $(z_H^{(i)}, c_0^{(i)})$ が存在すれば,$i \to \infty$で, $u^{(i)} = q\, z_H^{(i)} / p^t z_H^{(i)}$ $(\in R^{n+1})$ と<Dp>の解集合との距離が0に収束し,この時 $c_0^{(i)} \to c_0^*$である.

射影変換を用いて<Dp>を解く方法は,<Dp>の制約領域内を進む代わりに<DH>の制約領域の中を進むことによって, $F(z_H, c_0)$を最小化していると解釈できる. Fが同次関数なので,一旦<DH>の制約領域の内点でFを十分に小さくする点$z_H^{(i)}$が見つかれば,<Dp>の制約領域の内点でFを十分に小さくする点は上述した通りに$u^{(i)}$を

求めることで簡単に得られ，このとき$u^{(i)}$は，＜Ｄｐ＞の十分に良い近似解になっている．大雑把にいって， $F(z_H, c_0)$を一回の反復で一定比率（問題に依らない定数）だけ小さくすることができれば，＜Ｄｐ＞を解く多項式オーダーの算法が得られることになる．

３．双対標準形線形計画問題とKarmarkarの正準形

＜Ｄ＞のある可能解x_0が与えられているとする．このとき $x_{0H}=(x_0^t, 1)^t$ は＜ＤＨ＞の可能解である．一般の線形等式・不等式系について，制約領域内で“各不等式に対するスラックの積の値を最大化する点”は“center”と呼ばれ，特別によい性質を持つ点であることが知られている（“center”が存在するための必要十分条件は，制約領域が有界であることである）．そこで，x_{0H}がcenterになるように付加等式制約条件 $p_H^t z_H = q$を選んで＜Ｄ＞と等価な問題＜Ｄｐ＞を作ることを考える．すると，問題＜ＤＨ＞の制約に対する log barrier function $-\log \prod A_H^t z_H$ のx_{0H}における gradient $\eta_H(x_{0H}) = A_H [A_H^t x_{0H}]^{-1} 1$ （ここではベクトル v に対して記法 $[v]$ によって， v の各要素をその成分とする対角行列を表す；また，1 によってその全要素が1であるようなベクトルを表す.）を法線方向に持ち，x_{0H} を通るような線形等式制約式

$$\eta_H(x_{0H})^t z_H = m \tag{6}$$

を＜ＤＨ＞に新たに付け加えることによって，＜Ｄ＞と等価で，しかも，現在自分がいる点x_{0H}が“center”となるような線形計画問題＜Ｄη＞が得られることが分かる．（＜Ｄ＞と＜Ｄη＞の等価性は，＜Ｄη＞の制約領域が“center”を持ち，したがって有界であることから導ける．）この問題は，＜Ｄ＞に対してFreundの考えた射影変換を行って得られる問題と密接な関係がある．

変数z_Hの代わりにスケーリングされたスラック変数 $s = [A_H^t x_{0H}]^{-1} A_H^t z_H \in R^m$ （すなわち s は z_H の線形関数となる）を導入して＜Ｄη＞を表現することを考える．＜Ｄη＞が

$$\min\ c_H^t(c_0^*) z_H, \quad \text{subject to} \quad [A_H^t x_{0H}]^{-1} A_H^t z_H - s = 0, \quad 1^t s = m, \quad s \geqq 0 \tag{7}$$

と等価であることは明らかである． $[A_H^t x_{0H}]^{-1} A_H^t z_H - s = 0$ は overdetermined だが consistent な方程式であるから，これをz_Hについて解いて，

$$z_H = B_H^{-1} A_H [\, A_H^t x_{0H} \,]^{-1} s, \qquad B_H = A_H [\, A_H^t x_{0H} \,]^{-2} A_H^t \tag{8}$$

を得る．(8)を用いて＜Ｄη＞からz_Hを消去して，スラック変数 s のみで＜Ｄη＞を表現すると次のようになる：

＜ＤＫ＞

$$\min \ c_K^t(c_0^*) s, \qquad \text{subject to} \ \ (I - P)s = 0, \ \ \mathbf{1}^t s = m, \ \ s \geqq 0. \tag{9}$$

ここで，

$$P = [\, A_H^t x_{0H} \,]^{-1} A_H^t B_H^{-1} A_H [\, A_H^t x_{0H} \,]^{-1}, \quad c_K(c_0^*) = [\, A_H^t x_{0H} \,]^{-1} A_H^t B_H^{-1} c_H(c_0^*). \tag{10}$$

現在いる点x_{0H}が s の空間で $\mathbf{1}$ $(\in R^m)$ に移ることを考えると，このように書き換えられた問題はKarmarkarの正準形そのものである．＜ＤＫ＞に Karmarkar法を適用することによって得られる方向は次のようになる：

$$\Delta s = -P\Big(I - \frac{\mathbf{1}\mathbf{1}^t}{m}\Big) c_K(c_0^*), \quad \Delta s \in R^m. \tag{11}$$

これを関係 $z_H = B_H^{-1} A_H [\, A_H^t x_{0H} \,]^{-1} s$ を利用してz_Hの空間での表現に直して

$$d_K(x_{0H}, c_0^*) \equiv \Delta z_H = B_H^{-1}(-c_H(c_0^*) + m^{-1} c_H^t(c_0^*) x_{0H} \eta_H) \tag{12}$$

を得る．この方向は，計量 B_H に関する F の無制約最急降下方向にもなっている．

一方，山下法（をその本質は失わないようにして，少しだけ修正したもの；これは[4]で（修正）山下法として取り上げられているものと同じである．オリジナルな山下法[2]とどこが異なるかについては[4]を参照のこと．）では， x_{0H}において，付加等式制約条件として $c_H^t(c_0^*) z_H = c_H^t(c_0^*) x_{0H}$ を考え，この制約を満たした上で（5）の分母を最大化するためのNewton方向を探索方向としている．より具体的にはx_{0H}での（修正）山下法の＜ＤＨ＞の制約領域内の探索方向 $d_Y(x_{0H}, c_0^*)$ は次のようになる：

$$d_Y(x_{0H}, c_0^*) \equiv B_H^{-1}\Big(\eta_H - c_H(c_0^*) \frac{c_H^t(c_0^*) x_{0H}}{c_H^t(c_0^*) B_H^{-1} c_H(c_0^*)}\Big). \tag{13}$$

(12)と(13)より分かるように, $d_K(x_{0H}, c_0^*)$ も $d_Y(x_{0H}, c_0^*)$ も共に, $B_H^{-1}c_H(c_0^*)$, $B_H^{-1}\eta_H$ の一次結合として表現される. 実は, [4] で示されているように, $B_H^{-1}\eta_H$の成分は<D>の空間での探索方向として表現しなおすと消えてしまう (<D>での探索方向に影響を与えない) ようになっていて, 結局, d_Kとd_Yは<D>の制約領域内の探索方向としてはまったく同じものになってしまう構造になっている.

このように, 今いる点を "center" に持ってくるという考え方に基づいて, Karmarkar法の双対標準形版を導くことができ, そしてそれは (修正) 山下法と本質的には同じものになることが分かる.

4. 下界値の更新について

ところで, Karmarkarの論文 [1] では, 目的関数の最小値が0であると仮定している. この仮定を取り除くため, (iv) (最小値既知の仮定) の代わりに次の仮定

(iv)' 目的関数の最小値の下界c_0 ($\leq c_0^*$) が分かっている (最小値は未知でもよい).

を置いて, 以下のような方針で目的関数の最小値の下界値の更新を行うことが考えられる.

<下界値の更新の考え方>

今, z_Hにいるとして, ある探索方向 $d(z_H, c_0)$ が与えられた時に,

(0) $d(z_H, c_0)$方向に進むと$F(z_H, c_0)$を一定比率だけ (すなわち多項式性を保証するだけ) 小さくできるかどうかのテストを行い,

(1-1) $d(z_H, c_0)$方向に進むことで, $F(z_H, c_0)$を一定比率だけ小さくできるならばその方向に進み,

(1-2) そうでない時は今いる点z_Hの情報から $c_0 < c_0^+ \leq c_0^*$となるようなc_0^+を作りだす. この時, $d(z_H, c_0^+)$方向に進むと$F(z_H, c_0^+)$を一定比率だけ減らせるようにc_0^+を "うまく" 構成する. そして $c_0 = c_0^+$として (0) に戻る. ■

山下は, <D>の目的関数の下界値をz_Hにおいて次のようにして更新することを提案している. 以下,

$$w(\alpha) \equiv [A_H^t z_H]^{-2} A_H^t B_H(z_H)^{-1} c_H(\alpha) \tag{14}$$

と置く. (以降, $B_H(z_H) = A_H [A_H^t z_H]^{-2} A_H^t$, $\eta_H(z_H) = A_H [A_H^t z_H]^{-1} \mathbf{1}$ とする.)

<山下法の下界値の更新>

（0）今いる点z_Hにおいて，$w(c_0)$を計算する．

（1-1）もし，$w(c_0) \not> 0$ならば，

$$d_Y(z_H, c_0) \equiv B_H^{-1}\left(\eta_H(z_H) - c_H(c_0)\frac{c_H^t(c_0)z_H}{c_H(c_0)^t B_H^{-1} c_H(c_0)}\right) \tag{15}$$

方向に進むことで，$F(z_H, c_0)$を一定比率小さくできる．

（1-2）もし，$w(c_0) > 0$ならば，$c_0^+ = c_0$より始めて，$w(c_0^+) \not> 0$となるまでc_0^+を増加させる．そして，$c_0 = c_0^+$として（0）に戻る．■

山下は，上記の手順を提案し，<D>の目的関数値の最小値の下界さえあらかじめ分かっていれば多項式性を持つ<D>の解法が構成できることを示した．

一方，Todd-Burrellは［5］において，Karmarkarの正準形問題に対して前ページで述べたのと同様の方針に基づいて目的関数の下界値を更新する方法を提案している．3節で述べた問題の変形を利用すれば，Todd-Burrell による下界値の更新法を双対標準形線形計画問題に適用できる．2つの下界値の更新法を比較すると，Todd-Burrellの下界値更新法を双対標準形に適用したものは，その導出の手順はまったく異なるものの，山下のそれと本質的な部分，すなわち，（0）下界値c_0の更新を行うかどうかの判定基準，（1-1）下界値の更新を行う必要がない場合の（<D>の制約領域での）探索方向，そして，（1-2）下界値の更新を行うときにc_0^+をどのようにして決定するか，について一致することが分かる．この点についてのより詳細な議論に関しては［6］を参照されたい．

参考文献

［1］N. Karmarkar: A New Polynomial-Time Algorithm for Linear Programming, *Combinatorica*, Vol. 4, No. 4 (1984), pp. 373-395.

［2］H. Yamashita: A Polynomially and Quadratically Convergent Method for Linear Programming, Mathematical Systems Institute Inc. Technical Report (1986).

［3］Robert M. Freund: An Analog of Karmarkar's Algorithm for Inequality Constrained Linear Programs, with a 'New' Class of Projective Transformations for Centering a Polytope, *Operations Reseach Letters*, Vol. 7, No. 1 (1988), pp. 9-13.

［4］土谷隆：山下法とFreund法について，統計数理研究所共同研究リポート，Vol. 10 (1988), pp. 105-116.

［５］M. J. Todd and B. P. Burrell: An Extension of Karmarkar's Algorithm for Linear Programming Using Dual Variables, *Algorithmica*, Vol. 1 (1986), pp. 409-424.
［６］土谷隆：山下による下界値の更新とTodd-Burrellによる下界値の更新の比較，原稿（準備中）(1988).